نشرالگو

تمام
تمرین امتحان

هندسه دهم

حمیدرضا ملکی

درسنامهٔ سؤال‌محور | سؤالات تألیفی | سؤالات تکمیلی | سؤالات امتحانی | پاسخ‌های تشریحی

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب بر اساس محتوای کتاب درسی هندسهٔ ۱ پایهٔ دهم نوشته شده است و سه ویژگی مهم دارد:

۱ مطالب کتاب درسی را کاملاً پوشش می‌دهد. شما می‌توانید حل تشریحی همهٔ فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی هندسهٔ ۱ را در آن ببینید.

۲ شما را برای امتحان نهایی کاملاً آماده می‌کند. در پایان هر فصل، تعدادی سؤال آورده شده‌اند که بر اساس امتحانات نهایی بارم‌بندی و پاسخ داده شده‌اند. همچنین سه امتحان شبیه‌ساز امتحان نوبت اول و سه امتحان شبیه‌ساز امتحان نهایی (نوبت دوم) طراحی شده‌اند که با بررسی همهٔ آن‌ها، کسب نمرهٔ ۲۰ در امتحان نهایی برای شما آسان می‌شود.

۳ توانایی حل مسئلهٔ شما را افزایش می‌دهد.

بی‌شک بسیاری از شما در برخورد با مسئله‌های هندسه با این پرسش مواجه شده‌اید که چطور آن را حل کنم؟ در تألیف این کتاب، هدف اصلی‌ام این بوده است که مهارت حل مسئلهٔ شما در هندسه افزایش یابد. برای این منظور، علاوه بر مسئله‌های کتاب درسی، سؤالاتی آورده شده‌اند که به شما در رسیدن به این هدف کمک می‌کنند. همچنین بسیاری از مسئله‌ها و تمرین‌های این کتاب با روش‌های گوناگون حل شده‌اند تا با ایده‌ها و تکنیک‌های مختلف حل مسئله‌های هندسه آشنا شوید. در پایان هر فصل، برای دانش‌آموزان علاقه‌مند چند مسئلهٔ تکمیلی وجود دارد. با حل این مسئله‌ها، چالش‌های بیشتری را تجربه می‌کنید. حتماً به آن‌ها فکر کنید.

ترتیب درس‌های این کتاب بر اساس کتاب درسی هندسهٔ ۱ است. البته در ابتدای کتاب، درسی با عنوان یادآوری آورده شده است. در این درس با بیان چند مسئله و تمرین، مطالب دورهٔ اول متوسطه مرور شده‌اند. حتماً برای این درس وقت بگذارید و به آن مسلط شوید.

چند توصیه برای افزایش توانایی حل مسئله در هندسه به شما داریم:

۱ شکل مسئله‌ها را خوب و دقیق رسم کنید. رسم شکل زیبا و دقیق به شما در یافتن ایدهٔ حل مسئله کمک می‌کند.

۲ به مسئله‌ها خوب فکر کنید. ما در این کتاب یک شعار را دنبال می‌کنیم. حل نکردن اشکال ندارد ولی فکر نکردن اشکال دارد. خیلی مهم است که به اندازهٔ کافی روی مسائل فکر کنید. اگر هم حل نشد، هیچ اشکالی ندارد.

۴ از پاســخنامه خیلی کم اســتفاده کنید. سعی کنید تا جای ممکن خودتان مسئله‌ها را حل کنید. اگر نتوانستید، باز هم حل کامل را از پاسخنامه نخوانید، بلکه از آن راهنمایی بگیرید.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از همکاران عزیزم در نشــر الگو، دکتر آریس آقانیانس و دکتر ابوالفضل علی‌بمانی برای ویراســتاری علمی، خانم فاطمه احدی برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنم.

حمیدرضا ملکی

فهرست مطالب

فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل دوم: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

فصل سوم: چندضلعی‌ها

فصل چهارم: تجسم فضایی

فصل پنجم: پاسخ‌های تشریحی

فصل دوم

فصل سوم

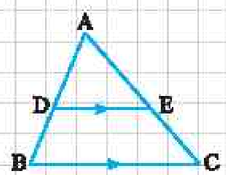
فصل چهارم

قضیهٔ تالس

یکی از مهم‌ترین قضیه‌های هندسهٔ ۱، قضیهٔ تالس است. در این درس قضیهٔ تالس، نتایج قضیهٔ تالس، عکس قضیهٔ تالس، تعمیم قضیهٔ تالس و قضیهٔ تالس در ذوزنقه بیان و ثابت می‌شوند.

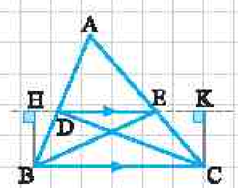
قضیه ۱ (قضیهٔ تالس)

اگر در شکل مقابل $DE \| BC$، آن‌گاه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.



ما در اینجا قضیهٔ تالس را با نماد ریاضی بیان کرده‌ایم. بیان کلامی آن بدین صورت است: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها تشکیل یک تناسب را می‌دهند.

اثبات: اثبات این قضیه با استفاده از مساحت است. در واقع از لم ۱ و لم ۲ که در درس قبل گفته شدند، استفاده می‌شود. در ابتدا دو بار از لم ۱ استفاده می‌کنیم:



$$\triangle EAB, E \text{ گره}: \frac{AD}{DB}=\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}}, \qquad \triangle DAC, D \text{ گره}: \frac{AE}{EC}=\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}}$$

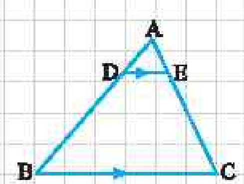
با مقایسهٔ حکم قضیه و دو تناسب بالا، کافی است ثابت کنیم $S_{BDE}=S_{CDE}$. این همان لم ۲ است.

در حقیقت،

$$\begin{cases} S_{BDE}=\frac{۱}{۲}BH.DE \\ S_{CDE}=\frac{۱}{۲}CK.DE \qquad \Rightarrow S_{BDE}=S_{CDE} \\ DE\|BC \Rightarrow BH=CK \end{cases}$$

مسئله ۱۱ (کتاب درسی)

در شکل مقابل $DE \| BC$. اگر $AD=۱$، $DB=۳$ و $AE=۰/۸$، آن‌گاه طول پاره‌خط AC را به‌دست آورید.



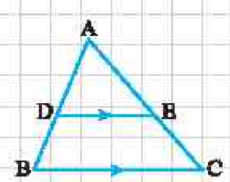
راه‌حل کافی است از قضیهٔ تالس استفاده کنیم.

$$DE\|BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{۰/۸}{EC} \Rightarrow EC=۲/۴$$

در نتیجه $AC=AE+EC=۰/۸+۲/۴=۳/۲$

به قضیهٔ تالس که در بالا بیان شد، جزء به جزء از بالا نیز گفته می‌شود. این قضیه، صورت‌های دیگری نیز دارد که آن‌ها را به‌صورت نتایج قضیهٔ تالس بیان می‌کنیم.

نتیجه (نتایج قضیهٔ تالس) اگر در شکل مقابل $DE\|BC$، آن‌گاه



الف) جزء به کل از بالا: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

ب) جزء به کل از پایین: $\frac{BD}{BA}=\frac{CE}{CA}$

اثبات: اثبات این دو مورد بسیار ساده است. اگر به یاد داشته باشید، در مسئلهٔ ۵ بیان شده‌اند. کافی است از قضیهٔ تالس و ویژگی‌های تناسب استفاده کنیم. چون $DE\|BC$، پس طبق قضیهٔ تالس $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

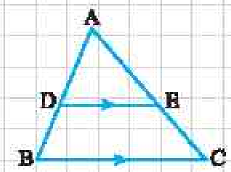
در نتیجه

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\begin{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب صورت در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \\ \xrightarrow{\text{ترکیب مخرج در صورت}} \frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE} \end{cases}$$

تناسب اول نتیجهٔ (الف) و معکوس تناسب دوم نتیجهٔ (ب) است.

اکنون می‌خواهیم قضیهٔ تالس را تعمیم دهیم و به یک قضیهٔ فوق‌العاده مهم برسیم. در واقع تعمیم قضیهٔ تالس اساس اثبات قضیه‌های مربوط به تشابه دو مثلث است که در درس سوم در مورد آن‌ها صحبت می‌کنیم.

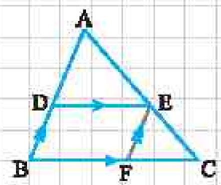
قضیه ۲ تعمیم قضیهٔ تالس



اگر در شکل مقابل $DE \| BC$، آن‌گاه

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

در اینجا تعمیم قضیهٔ تالس با نماد ریاضی بیان شده است. آیا می‌توانید آن را به صورت کلامی بیان کنید؟ این‌گونه بیان می‌شود: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند.
حتماً به اثبات تعمیم قضیهٔ تالس فکر کنید. مهم نیست که نتوانید آن را ثابت کنید، اما مهم است که خوب به آن فکر کنید. شاید برخی از شما بگویید این را با استفاده از تشابه مثلث‌ها می‌توان به‌راحتی ثابت کرد. این اثبات نادرست است، زیرا قضیه‌های تشابه دو مثلث از تعمیم قضیهٔ تالس نتیجه می‌شوند و نمی‌توان تعمیم قضیهٔ تالس را با استفاده از تشابه مثلث‌ها ثابت کرد. از توضیح بیشتر دربارهٔ تشابه در این بخش صرف‌نظر می‌کنیم و در درس سوم به‌طور مفصل در مورد آن صحبت می‌کنیم. اما اثبات درست تعمیم قضیهٔ تالس به‌صورت زیر است:



اثبات: در نتیجهٔ قضیهٔ تالس قسمت (الف)، ثابت کردیم

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$ جزء به کل از بالا

پس کافی است ثابت کنیم $\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$. برای این منظور از E خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا BC را در نقطهٔ F قطع کند. در این صورت چهارضلعی $DEFB$ متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه $DE=BF$ (در واقع پاره‌خط DE را روی BC منتقل کردیم). اکنون از نتیجهٔ قضیهٔ تالس در حالت $EF\|AB$ استفاده می‌کنیم (از رأس C قضیه را به کار می‌بریم).

$$EF\|AB \xrightarrow{\text{جزء به کل از پایین}} \frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC} \xrightarrow{DE=BF} \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

خب تا اینجا چند قضیه گفتیم و ثابت کردیم. احتمالاً حوصله‌تان سر رفته است. کمی استراحت کنید و برگردید که می‌خواهیم چند مسئله با هم حل کنیم. ☺

مسئله ۱۲ کتاب درسی

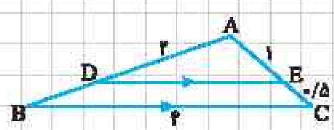
در شکل مقابل مقدار x را به‌دست آورید.

راه‌حل با توجه به قضیهٔ تالس،

$$\frac{x}{۳}=\frac{۲x-۰/۵}{۴/۵}\Rightarrow ۴/۵x=۶x-۱/۵\Rightarrow ۱/۵x=۱/۵\Rightarrow x=۱$$

مسئله ۱۳ کتاب درسی

با توجه به اندازه‌های روی شکل مقابل، طول پاره‌خط‌های BD و DE را به‌دست آورید.



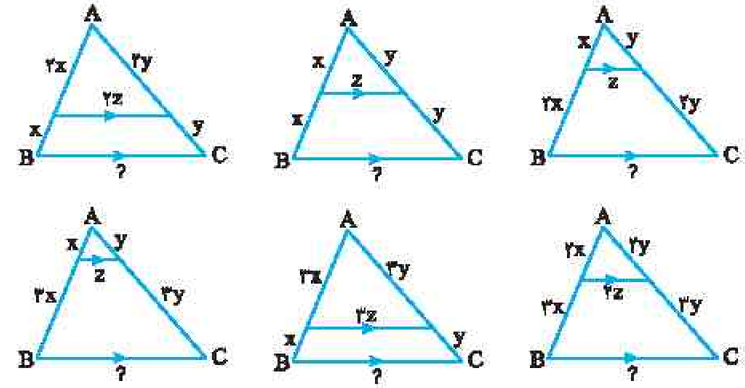
راه‌حل توجه کنید که

$$DE\|BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{۲}{BD}=\frac{۱}{۰/۵}\Rightarrow BD=۱$$

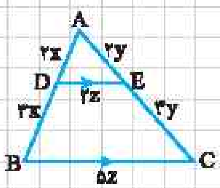
$$DE\|BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \xrightarrow{AB=۳} \frac{۲}{۳}=\frac{DE}{۴}\Rightarrow DE=\frac{۸}{۳}$$

مسئله ۱۴

در هر کدام از شـکل‌های زیر درسـتی قضیهٔ تالس، نتایج قضیهٔ تالس و تعمیم قضیهٔ تالس را بررسی کنید و در هر کدام طول ضلع BC را برحسب z به دست آورید.



راه‌حل سعی کنید به همهٔ شکل‌های این مسئله مسلط شوید. ما در اینجا فقط شکل سمت راست از ردیف پایین را بررسـی می‌کنیم. در این شـکل تناسـب جزء به جزء از بالا (قضیهٔ تالس) به‌صورت $\frac{۲x}{۳x}=\frac{۲y}{۳y}=\frac{۲}{۳}$ است. همچنین تعمیم قضیهٔ تالس در آن به‌صورت زیر است:



$$\frac{۲x}{۵x}=\frac{۲y}{۵y}=\frac{۲z}{BC}\Rightarrow\frac{۲z}{BC}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow BC=۵z$$

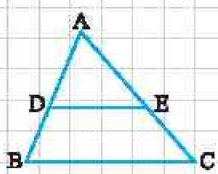
با توجه به جایگاه شکل‌ها، پاسخ‌های قسمت‌های دیگر مطابق جدول مقابل است:

۳z	۲z	۳z
۴z	۴z	۵z

مسئلهٔ بالا کمک می‌کند که قضیهٔ تالس را به خوبی یاد بگیرید. سعی کنید خودتان چند مثال دیگر بزنید و در هر کدام نسبت‌ها و طول‌های پاره‌خط‌ها را حساب کنید. این کار بسیار اهمیت دارد.

قضیه ۳ عکس قضیهٔ تالس

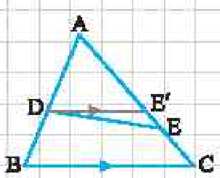
اگر در شکل مقابل $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، آن‌گاه $DE \parallel BC$.



مـا در اینجا عکس قضیهٔ تالس را با نماد ریاضـی بیان کرده‌ایم. آیا می‌توانید آن را به صورت کلامی نیـز بیـان کنیـد؟ بیان کلامی آن بدین صورت اسـت: اگر خطی دو ضلع مثلـث را قطع کند و روی آن‌ها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

قبول داریم که بیان کلامی آن سخت است. اما سعی کنید آن را یاد بگیرید.

اثبات: از برهان خلف اسـتفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم حکم نادرسـت باشد، یعنی $DE \nparallel BC$. از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ E' قطع کند. در نتیجه



$$DE' \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$$

توجه کنید که طبق فرض $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. در نتیجه،

$$\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}\xrightarrow{\text{ترکیب صورت در مخرج}}\frac{AE'}{AE'+E'C}=\frac{AE}{AE+EC}\Rightarrow\frac{AE'}{AC}=\frac{AE}{AC}$$

بنابراین $AE'=AE$، که تناقض است، زیرا E و E' دو نقطهٔ متمایزند.

مسئله ۱۵ قضیهٔ میان‌خط در مثلث

مطابق شکل مقابل وسط‌های دو ضلع مثلث به هم وصل شده‌اند. ثابت کنید $MN || BC$ و $MN=\frac{BC}{۲}$.

راه‌حل با توجه به فرض هر دو نسبت $\frac{AM}{MB}$ و $\frac{AN}{NC}$ برابر یک هستند. پس

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=۱ \xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}} MN||BC$$

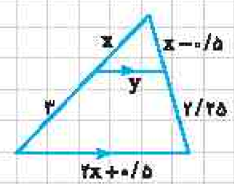
اکنون با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس به‌دست می‌آید

$$MN||BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \xrightarrow{AB=۲AM} \frac{۱}{۲}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow MN=\frac{BC}{۲}$$

در فصل سوم از قضیهٔ میان‌خط در مثلث استفاده می‌کنیم.

مسئله ۱۶ کتاب درسی

با توجه به شکل مقابل مقادیر x و y را به‌دست آورید.



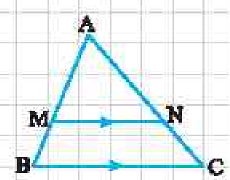
راه‌حل بنابر قضیهٔ تالس، $\frac{x}{۳}=\frac{x-۰/۵}{۲/۲۵} \Rightarrow ۲/۲۵x=۳x-۱/۵ \Rightarrow ۰/۷۵x=۱/۵ \Rightarrow x=۲$

و طبق تعمیم قضیهٔ تالس، $\frac{x}{x+۳}=\frac{y}{۲x+۰/۵} \xrightarrow{x=۲} \frac{۲}{۵}=\frac{y}{۴/۵} \Rightarrow y=\frac{۹}{۵}=۱/۸$

مسئلهٔ بعدی خیلی مهم است.

مسئله ۱۷ کتاب درسی

با توجه به شکل مقابل درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید:

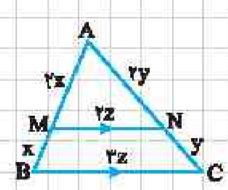


الف) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC}$

ب) $\frac{BM}{BA}=\frac{CN}{CA}=\frac{MN}{BC}$

پ) $\frac{BM}{BA}=\frac{CN}{CA}=\frac{BC}{MN}$

راه‌حل در هر سه عبارت بالا، دو نسبت اول با هم برابرند ولی با سومی برابر نیستند. به‌عنوان مثال نقض هر سه عبارت را در شکل مقابل بررسی می‌کنیم:



الف) $\frac{۲x}{x}=\frac{۲y}{y}\neq\frac{۲z}{۳z}$

ب) $\frac{x}{۳x}=\frac{y}{۳y}\neq\frac{۲z}{۳z}$

پ) $\frac{x}{۳x}=\frac{y}{۳y}\neq\frac{۳z}{۲z}$

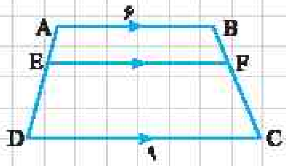
پس هر سه عبارت نادرست‌اند.

موافقید که کمی چالش مسئله‌ها را بیشتر کنیم؟ تا اینجا همهٔ مسئله‌ها با یک قضیهٔ تالس حل می‌شدند. اکنون می‌خواهیم سه مسئلهٔ ترکیبی مطرح کنیم. سعی کنید به خوبی به هر مسئله فکر کنید.

مسئله ۱۸

کتاب درسی

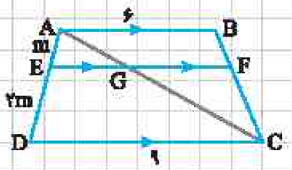
در شکل مقابل $\frac{AE}{ED}=\frac{۱}{۲}$. با توجه به اندازه‌های روی شکل طول پاره‌خط EF را به دست آورید.



راه‌حل گام اول در پاسخ به این مسئله، انتقال اطلاعات مسئله به شکل است. در فرض مسئله، تناسب $\frac{AE}{ED}=\frac{۱}{۲}$ وجود دارد که با انتخاب یک پارامتر مانند m می‌توان این فرض را به شکل منتقل کرد.

گام دوم، تمرکز روی شکل و یافتن اطلاعات جدید است. یافتن اطلاعات جدید ممکن است زمان‌بر باشد ولی باید صبور باشید. در شکل بالا خطوط موازی وجود دارند و قصد داریم که از قضیهٔ تالس استفاده کنیم. به نظرتان چطور می‌توان در شکل تغییراتی ایجاد کرد که از قضیهٔ تالس بتوانیم استفاده کنیم؟ سه روش در اینجا پیشنهاد می‌کنیم.

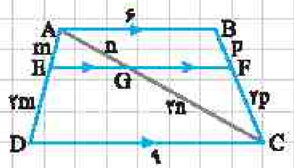
روش اول: یکی از قطرهای ذوزنقه را رسم می‌کنیم.



اکنون اطلاعات جدیدی به مسئله اضافه می‌شوند. با تمرکز روی شکل، دو قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADC و CAB مشاهده می‌شوند. توجه کنید که قضیهٔ تالس در مثلث CAB از طرف رأس C است. پس می‌توان نوشت

$$\triangle ADC: EG\,||\,DC \Rightarrow \frac{AE}{ED}=\frac{AG}{GC} \Rightarrow \frac{AG}{GC}=\frac{۱}{۲}$$

$$\triangle CAB: GF\,||\,AB \Rightarrow \frac{CG}{GA}=\frac{CF}{FB} \Rightarrow \frac{CF}{FB}=۲$$



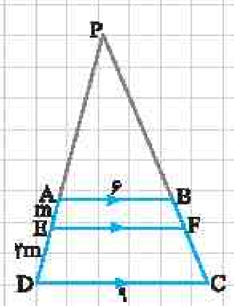
اکنون با پارامترهای n و p اطلاعات را به شکل منتقل می‌کنیم و سعی می‌کنیم طول قطعه‌های EG و GF را حساب کنیم. برای این منظور از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم:

$$\triangle ADC: EG\,||\,DC \Rightarrow \frac{EG}{DC}=\frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EG}{۹}=\frac{m}{۳m}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow EG=۳$$

$$\triangle CAB: GF\,||\,AB \Rightarrow \frac{GF}{AB}=\frac{CG}{CA} \Rightarrow \frac{GF}{۶}=\frac{۲n}{۳n}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow GF=۴$$

در نتیجه $EF=EG+GF=۳+۴=۷$.

روش دوم: دو ساق AD و BC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند.

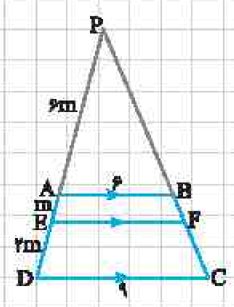


آیا می‌توانید سه تا قضیهٔ تالس در شکل ببینید؟ از دو تا از آن‌ها استفاده می‌کنیم و به جواب مسئله می‌رسیم. چنین می‌توان نوشت

$$\triangle PDC: AB\,||\,DC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{PA}{PD}=\frac{AB}{CD}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

حال با استفاده از تفضیل صورت در مخرج داریم

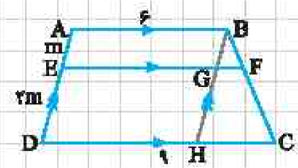
$$\frac{PA}{PD-PA}=\frac{۲}{۳-۲} \Rightarrow \frac{PA}{AD}=۲ \Rightarrow PA=۲AD=۶m$$



دوباره اطلاعات به‌دست‌آمده را به شکل منتقل می‌کنیم. اکنون کافی است از تعمیم قضیهٔ تالس یک‌بار دیگر استفاده کنیم:

$$\triangle PEF: AB\,||\,EF \Rightarrow \frac{AB}{EF}=\frac{PA}{PE} \Rightarrow \frac{۶}{EF}=\frac{۶m}{۷m}=\frac{۶}{۷} \Rightarrow EF=۷$$

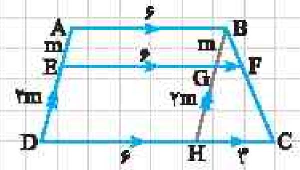
روش سوم: از B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا EF را در G و CD را در H قطع کند.
در شکل چند متوازی‌الاضلاع می‌بینید؟ آیا یک قضیهٔ تالس در شکل مشاهده می‌کنید؟



از متوازی‌الاضلاع‌ها استفاده می‌کنیم و اطلاعات جدید را به شکل اضافه می‌کنیم:

$$AB=EG=DH=۶\,,\quad HC=DC-DH=۳$$

$$AE=BG=m\,,\quad ED=GH=۲m$$



اکنون طبق تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\triangle BHC: GF \parallel HC \Rightarrow \frac{GF}{HC}=\frac{BG}{BH} \Rightarrow \frac{GF}{۳}=\frac{m}{۳m}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow GF=۱$$

در نتیجه $EF=EG+GF=۶+۱=۷$.

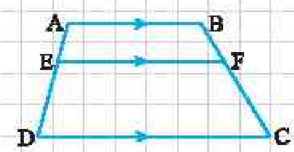
این مسئله را به‌طور مفصل توضیح دادیم و سعی کردیم که روش‌ها و ایده‌های حل آن را بررسی کنیم. ممکن است شما هم روش‌های دیگری برای حل آن ارائه کنید که خیلی ارزشمند است.

مسئله ۱۹ قضیهٔ تالس در ذوزنقه

کتاب درسی

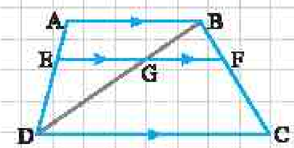
در شکل مقابل، ثابت کنید

$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$



راه‌حل سعی کنید قبل از دیدن راه‌حل، خودتان آن را اثبات کنید.

قطر BD را رسم می‌کنیم تا EF را در نقطهٔ G قطع کند. در این صورت ذوزنقه به دو مثلث تقسیم می‌شود که در هر کدام می‌توانیم قضیهٔ تالس را به کار ببریم:



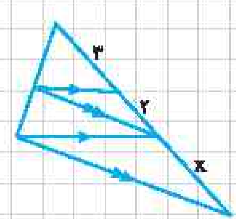
$$\triangle DAB: EG \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{EA}=\frac{DG}{GB}\,,\qquad \triangle BCD: GF \parallel DC \Rightarrow \frac{BF}{FC}=\frac{BG}{GD}$$

توجه کنید که $\frac{DG}{GB}$ و $\frac{BG}{GD}$ معکوس یکدیگرند. پس $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$.

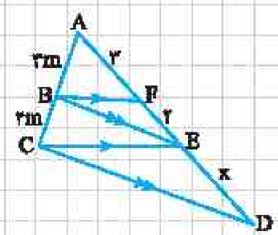
حکم مسئلهٔ بالا را می‌توانید با امتداد دادن ساق‌های ذوزنقه نیز ثابت کنید. حتی می‌توانید حکم این مسئله را با یک‌بار استفاده از قضیهٔ تالس نیز ثابت کنید. برای این منظور کافی است از B خطی موازی AD رسم کنید. حتماً سعی کنید این دو روش را تکمیل کنید.

مسئله ۲۰

با توجه به شکل مقابل، مقدار x را به‌دست آورید.



راه‌حل کلید حل این سؤال توجه کامل به شکل است. آیا می‌توانید دو تا قضیهٔ تالس در شکل ببینید؟ آیا دو جفت پاره‌خط موازی در شکل دو تا قضیهٔ تالس را به ذهنتان نمی‌آورند؟ با یافتن دو قضیهٔ تالس در شکل، بیش از نیمی از راه‌حل مسئله را پیموده‌اید. کافی است که نسبت‌ها را با هم مقایسه کنید و اطلاعات جدید را به شکل منتقل کنید. بدین صورت که



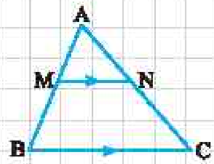
$$\triangle ACE: BF \parallel CE \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AF}{FE}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow AB=۳m\,,\ BC=۲m$$

$$\triangle ACD: BE \parallel CD \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AE}{ED} \Rightarrow \frac{۳m}{۲m}=\frac{۵}{x} \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$$

در مسئلهٔ بالا ایدهٔ انتقال نسبت‌ها انجام شد. در واقع نسبت روی پاره‌خط AE به پاره‌خط AC منتقل شد و سپس از AC به AD انتقال یافت.

درس دوم

تمرین‌های تشریحی



۵۳ در شکل مقابل پاره‌خط MN موازی BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید: کتاب درسی

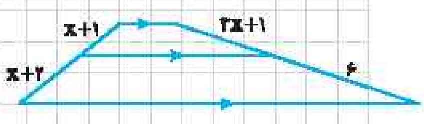
الف) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC}$ ب) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

پ) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ ت) $\frac{AM}{BM}=\frac{MN}{BC}$

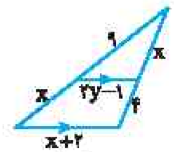
ث) $\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}=\frac{MN}{BC}$ ج) $\frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}$

چ) $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ ح) $\frac{MB}{AB}=\frac{MN}{BC}$

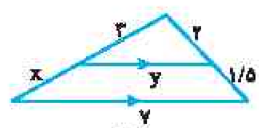
۵۴ با توجه به شکل‌های زیر، مقادیر x و y را به‌دست آورید. کتاب درسی



(پ)



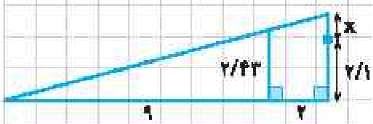
(ب)



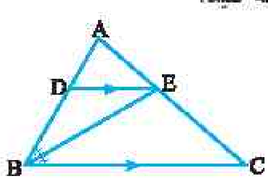
(الف)

۵۵ شکل مقابل یک کاربرد از قضیهٔ تالس برای محاسبهٔ بلندی درخت است. اگر طول سایهٔ درخت $۶m$، طول سایهٔ میلهٔ شاخص $۳m$ و ارتفاع این میله $۱m$ باشد، بلندی درخت چند متر است؟ (میله و درخت را عمود بر زمین در نظر بگیرید.) کتاب درسی

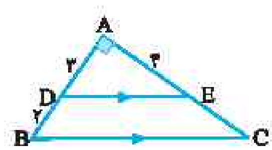
۵۶ با توجه به اندازه‌های روی شکل مقدار x را به‌دست آورید. کتاب درسی



۵۷ در شکل‌های زیر طول ضلع BC را محاسبه کنید.

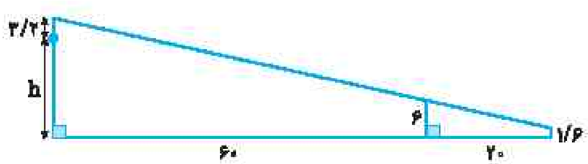


(ب)

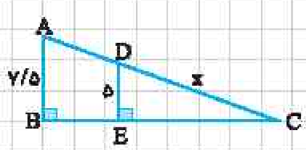


(الف)

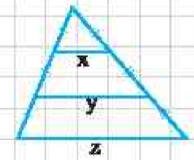
۵۸ با توجه به اندازه‌های داده شده در شکل زیر، مقدار h را به‌دست آورید. کتاب درسی



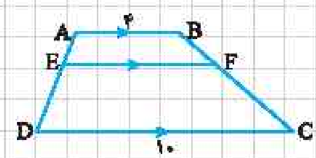
۵۹ در شکل مقابل $BC=۱۸$. با توجه به سایر اندازه‌های روی شکل، مقدار x را به‌دست آورید.



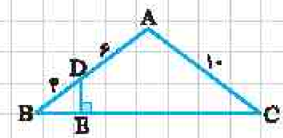
۶۰ با توجه به شکل مقابل، ثابت کنید $x+y=z$.



۶۱ در ذوزنقهٔ مقابل $\frac{AE}{ED}=\frac{1}{2}$. طول پاره‌خط EF را به‌دست آورید.



۶۲ در شکل مقابل DE بر BC عمود است. $AD=6$، $DB=4$، $AC=10$ و $BC=16$. طول پاره‌خط DE را به‌دست آورید.

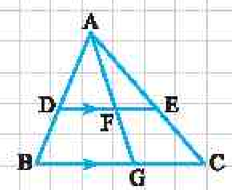


۶۳ با توجه به شکل مقابل کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

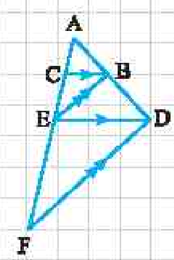
الف) $\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}$
ب) $\frac{DE}{DA}=\frac{CF}{CB}$

پ) $\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}=\frac{EF}{DC}$
ت) $\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}=\frac{AB}{DC}$

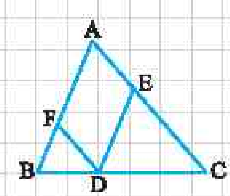
۶۴ با توجه به شکل مقابل ثابت کنید $\frac{DF}{FE}=\frac{BG}{GC}$.



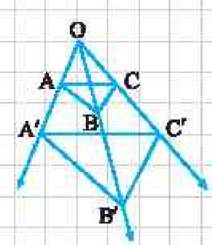
۶۵ در شکل مقابل ثابت کنید طول پاره‌خط AE واسطهٔ هندسی طول پاره‌خط‌های AC و AF است. کتاب درسی



۶۶ در شکل مقابل AFDE متوازی‌الاضلاع است. ثابت کنید $\frac{DE}{AB}+\frac{DF}{AC}=1$.



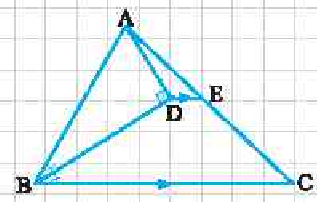
۶۷ در شکل مقابل $AB||A'B'$ و $BC||B'C'$. ثابت کنید $AC||A'C'$. کتاب درسی



مسائل تکمیلی

صفحات پاسخ: ۱۹۱ تا ۱۹۳

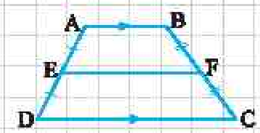
۱ مطابق شکل از A بر نیمساز زاویهٔ B عمود رسم شده است. اگر $AB=۹۶cm$ و $BC=۱۵۶cm$، طول پاره‌خط DE چند سانتی‌متر است؟



۲ (قضیهٔ میان‌خط در ذوزنقه) در ذوزنقهٔ مقابل وسط‌های دو ساق را به هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید:

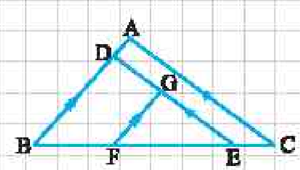
الف) EF موازی دو قاعده است.

ب) $EF=\dfrac{AB+CD}{۲}$

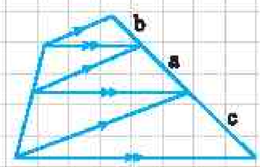


۳ با توجه به اندازه‌های شکل مقابل، مقدار $\dfrac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

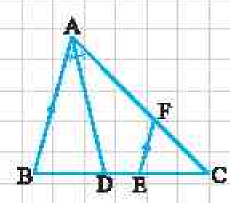
۴ اگر در شکل مقابل $AD=۲$، $BF=۲EC$ و $FE=۳EC$، طول پاره‌خط GF چقدر است؟



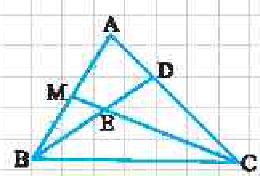
۵ با توجه به شکل مقابل ثابت کنید a واسطهٔ هندسی b و c است.



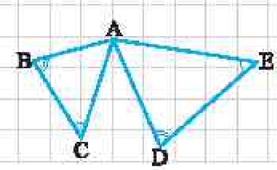
۶ مطابق شکل مقابل، اگر $BD=۲DE$، $AB=۲۴$ و $AF=۲۰$، آن‌گاه طول پاره‌خط CF چقدر است؟



۷ اگر در شکل روبه‌رو $AM=MB$ و $CD=۲AD$، مقدار $\dfrac{BE}{ED}$ را به‌دست آورید.

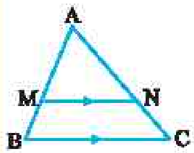
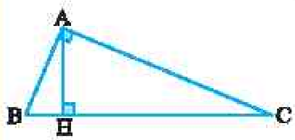
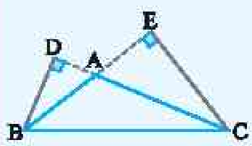
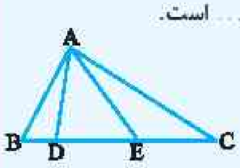


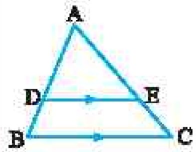
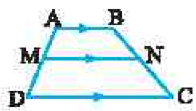
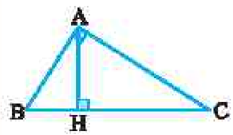
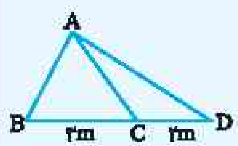
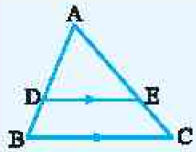
۸ در شکل روبه‌رو $\hat{B}=\hat{D}$ و $\hat{C}=\hat{E}$. ثابت کنید $\triangle ABD\sim\triangle ACE$.

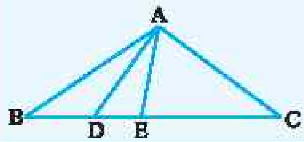
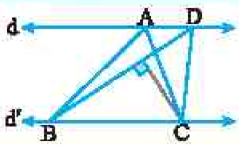
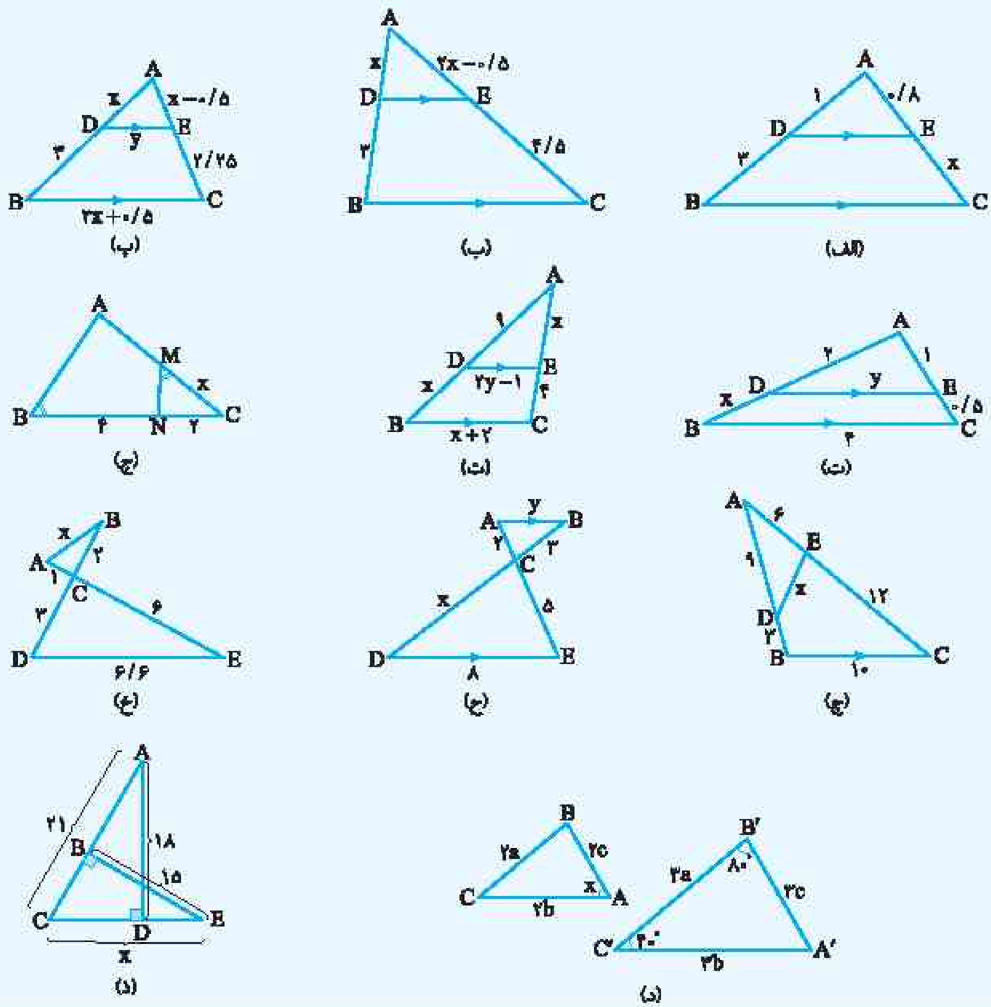


سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

صفحات پاسخ: ۱۹۴ تا ۱۹۷

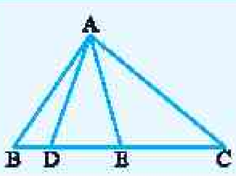
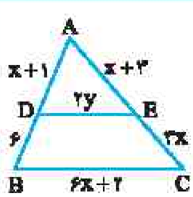
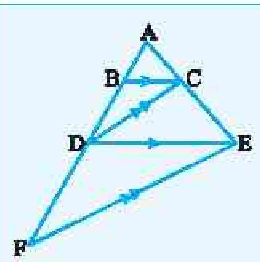
ردیف	سؤالات	بارم
۱	درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید. الف) در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است. ب) هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد می‌شوند. پ) واسطهٔ هندسی دو عدد ۸ و ۱۰ برابر ۹ است. ت) قضیهٔ تالس یک قضیهٔ دوشرطی است. ث) با توجه به شکل مقابل،  a) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{MN}{BC}$ b) $\frac{BM}{BA}=\frac{CN}{CA}$ c) $\frac{BM}{BA}=\frac{CN}{CA}=\frac{MN}{BC}$ d) $\frac{BM}{MA}=\frac{CN}{NA}$ ج) هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند. چ) با توجه به شکل مقابل،  a) $AB^{2}=BH.HC$ b) $AB.BC=AH.BH$ c) $AH^{2}=BH.HC$ d) $AC^{2}=CH.CB$ e) هر سه مثلث شکل، دوبه‌دو متشابه‌اند. ح) هرگاه دو مثلث متشابه باشد، نسبت محیط‌های آن‌ها مساوی نسبت مساحت‌های آن‌هاست. خ) هر دو nضلعی منتظم، با هم متشابه‌اند.	۴
۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) با توجه به شکل مقابل،  $S_{ABC}=\frac{1}{2}BD\times\cdots\cdots=\frac{1}{2}CE\times\cdots\cdots$ ب) در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت .... وارد بر آن‌ها برابر است. پ) هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت .... که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده‌اند. ت) اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت .... آن‌هاست. ث) اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آن‌ها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها .... هستند. ج) اگر $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$، آن‌گاه b را .... a و c می‌نامند. چ) با توجه به شکل مقابل نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت مثلث ABC برابر .... است. 	۷

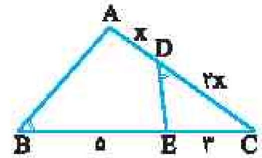
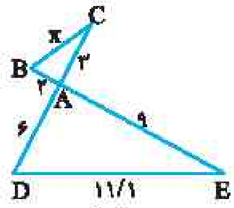
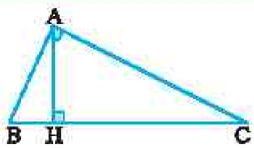
بارم	سؤال	ردیف
	 ح) با توجه به شکل مقابل، $\frac{AD}{DB}=$ .... (a $\frac{BD}{BA}=$ .... (b $\frac{AD}{AB}=$ ....=......... (c $\frac{CE}{EA}=$ .... (d  خ) با توجه به شکل مقابل، $\frac{AM}{MD}=$ .... (a $\frac{DM}{DA}=$ .... (b د) اگر خطی موازی یکی از ضلع‌های مثلثی، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی .... است. ذ) هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و .... باشند، دو مثلث متشابه‌اند.  ر) با توجه به شکل مقابل، $AB^۲=$ ....×......... (a $AH^۲=$ ....×......... (b $AC^۲=$ ....×......... (c $AH\times BC=$ ....×......... (d ز) اگر نسبت تشابه دو مثلث برابر k باشد، نسبت اندازه‌های هر دو میانهٔ متناظر مساوی .... است. ژ) هرگاه دو چندضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آن‌ها مساوی .... و نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر .... است. س) هر دو nضلعی منتظم، با هم .... هستند.	
۲/۲۵	جاهای خالی را با عددهای مناسب پر کنید. الف) واسطهٔ هندسی دو عدد ۳ و ۱۲ برابر .... است. ب) اگر $\frac{۳}{۵}=\frac{y}{۳}=\frac{x}{۲}$، آن‌گاه $x+y$ مساوی .... است.  پ) با توجه به شکل مقابل $\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}$ برابر .... است. ت) اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر ۹ باشد، نسبت طول‌های ارتفاع‌های متناظر آن‌ها مساوی .... است. ث) اگر نسبت محیط‌های دو چندضلعی متشابه برابر ۴ باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی .... است. ج) اندازه‌های محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۲۵ سانتی‌متر است. اگر مساحت مثلث بزرگ ۱۲۵ سانتی‌متر مربع باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، .... سانتی‌متر مربع است. چ) نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه $\frac{۹}{۱۶}$ است. اگر محیط یکی از آن‌ها ۱۲ واحد باشد، محیط دیگری .... یا .... است. ح) اندازه‌های اضلاع یک ده‌ضلعی را چهار برابر می‌کنیم، بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت ده‌ضلعی ....برابر می‌شود.	۳
۱/۵	قضیهٔ تالس در ذوزنقه را بیان و ثابت کنید.	۴
۱/۵	 با استفاده از قضیهٔ تالس و با توجه به شکل مقابل موارد زیر را ثابت کنید. الف) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ ب) $\frac{BD}{BA}=\frac{CE}{CA}$	۵
۱/۵	الف) با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، قضیهٔ فیثاغورس را ثابت کنید. ب) قضیهٔ فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دوشرطی بیان کنید.	۶

۷	دو مثلث با نسبت تشابه k متشابه‌اند. موارد زیر را ثابت کنید. الف) نسبت محیط‌های آن‌ها مساوی k است. ب) نسبت مساحت‌های آن‌ها مساوی k^2 است.	۱/۵
۸	سه مورد زیر را ثابت کنید. الف) هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده است. ب) اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آن‌هاست. پ) اگر دو مثلث قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آن‌ها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند.	۱/۷۵
۹	در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به‌دست آورید. 	۱/۲۵
۱۰	در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC برابر ۸cm^2 است. اگر BD=۶cm، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD را به‌دست آورید. 	۱
۱۱	در هریک از شکل‌های زیر مقدارهای x و y (در صورت وجود) را به‌دست آورید. 	۱۳/۲۵

امتحان نوبت اول (۲)

صفحات پاسخ: ۱۹۹ و ۲۰۰

ردیف	سؤالات	بارم
	سؤالات فصل اول	
۱	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. الف) هر نقطه که روی .... یک پاره‌خط قرار داشته باشد، .... به یک فاصله است. ب) نتیجه‌گیری بر مبنای چند آزمایش محدود، استدلال .... است. پ) به مثالی که درستی یک حکم کلی را رد می‌کند، .... گفته می‌شود.	۱
۲	عکس قضیه‌های زیر را بنویسید و سپس آن‌ها را به صورت یک قضیهٔ دوشرطی بیان کنید. الف) قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش منصف یکدیگرند. ب) قضیه: در هر مثلث، اگر سه ضلع هم‌اندازه باشند، آن‌گاه سه زاویه نیز هم‌اندازه‌اند.	۲
۳	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید. الف) با وصل کردن هر سه رأس یک هفت‌ضلعی منتظم، یک مثلث متساوی‌الساقین پدید می‌آید. ب) همهٔ اعداد صحیح، منفی‌اند.	۱
۴	نقطهٔ A به فاصلهٔ $1cm$ از خط d مفروض است. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ $2cm$ از A باشند.	۰/۷۵
۵	متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع غیرهم‌نهشت با این شرایط می‌توان رسم کرد؟	۱/۵
۶	نشان دهید نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند.	۱/۵
۷	می‌دانیم از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.	۱/۲۵
	سؤالات فصل دوم	
۸	در شکل مقابل مساحت مثلث ACE دو برابر مساحت مثلث ADE و سه برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{CE}$ را به‌دست آورید. 	۱/۵
۹	در شکل مقابل $DE \parallel BC$. مقادیر x و y را به‌دست آورید. 	۱/۵
۱۰	در شکل مقابل $BC \parallel DE$ و $DC \parallel FE$. ثابت کنید $AD^2 = AB.AF$. 	۱

۱۱	در هریک از دو شکل زیر مقدار x را به‌دست آورید.  (الف)  (ب)	۳
۱۲	به هریک از دو مورد زیر پاسخ دهید. الف) طول‌های اضلاع یک مثلث ۸، ۹ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه با آن ۱۲ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید. ب) نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی منتظم $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط پنج‌ضلعی کوچک‌تر ۲۴ باشد، محیط دیگری چقدر است؟	۱/۵
۱۳	در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل، الف) ثابت کنید $(\frac{AC}{BC})^{۲}=\frac{S_{ACH}}{A_{ABC}}$ و $(\frac{AB}{BC})^{۲}=\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}$. ب) با استفاده از دو نتیجهٔ قسمت (الف)، درستی قضیهٔ فیثاغورس را بررسی کنید. 	۲/۵
	سربلند و پیروز باشید جمع بارم	۲۰

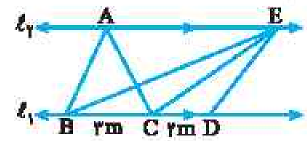
۵۰ ابتدا فرض $\frac{BC}{CD}=\frac{۳}{۲}$ را با پارامتر m به شکل منتقل می‌کنیم. طبق لم ۲،

$$S_{EBC}=S_{ABC}=۶۳cm^{۲}$$

اکنون با استفاده از لم ۱ در مثلث EBD با گره E داریم

$$\frac{S_{EBC}}{S_{ECD}}=\frac{۳m}{۲m}\Rightarrow\frac{۶۳}{S_{ECD}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow S_{ECD}=۴۲cm^{۲}$$

البته می‌توانیم این مسئله را با رسم ارتفاع‌های رأس‌های A و E نیز پاسخ دهیم و در بیان راه‌حل از لم ۱ و لم ۲ استفاده نکنیم. اما هدف ما آموزش استفاده از این لم‌ها و به ویژه لم ۱ است.



۵۱ ابتدا فرض‌ها را با انتخاب پارامترهای m و n به شکل منتقل می‌کنیم.

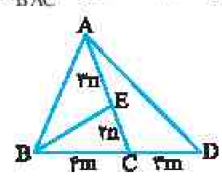
$$\frac{CD}{BD}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow CD=۳m\,,\ BD=۷m\Rightarrow BC=BD-CD=۴m$$

$$\frac{EC}{AE}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow EC=۲n\,,\quad AE=۳n$$

اکنون سعی کنید با دو بار استفاده از لم ۱ مسئله را حل کنید و اگر نتوانستید، بقیهٔ راه‌حل را بخوانید.

$\triangle ABD$ ، A گره $\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}}=\frac{۴m}{۷m}\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{۷۰}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow S_{ABC}=۴۰cm^{۲}$

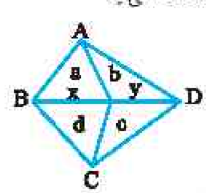
$\triangle BCA$ ، B گره $\Rightarrow\frac{S_{BAE}}{S_{BAC}}=\frac{۳n}{۵n}\Rightarrow\frac{S_{BAE}}{۴۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow S_{BAE}=۲۴cm^{۲}$



۵۲ از ظاهر مسئله نترسید. بسیار ساده و در واقع همان مسئلهٔ ۱۰ درس‌نامه است. کافی است دو بار از لم ۱ استفاده کنیم:

$\triangle ABD$ ، A گره $\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$ ، $\triangle CBD$ ، C گره $\Rightarrow\frac{d}{c}=\frac{x}{y}$

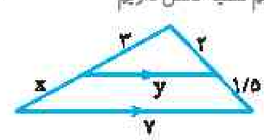
با مقایسهٔ دو تناسب بالا به‌دست می‌آید $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}\Rightarrow ac=bd$



۵۳ مورد (ب) قضیهٔ تالس و مورد (ج) معکوس مورد (ب) است، پس هر دو درست‌اند. مورد (ج) تعمیم قضیهٔ تالس و مورد (ب) قسمتی از آن است. پس هر دو درست‌اند. بقیهٔ موارد نادرست‌اند. برای مثال نقض به مسئلهٔ ۱۷ درس‌نامه رجوع کنید.

۵۴ الف) بنابر قضیهٔ تالس $\frac{۳}{x}=\frac{۲}{۱/۵}\Rightarrow x=۲/۲۵$

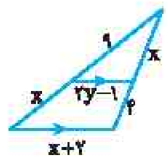
حال با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس داریم $\frac{۲}{۳/۵}=\frac{y}{۷}\Rightarrow y=۴$



ب) طبق قضیهٔ تالس، $\frac{۹}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۶$

با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس،

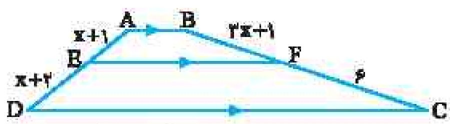
$$\frac{۹}{۹+x}=\frac{۲y-۱}{x+۲}\xrightarrow{x=۶}\frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}\Rightarrow ۲y-۱=۴/۸\Rightarrow y=۲/۹$$



پ) طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه،

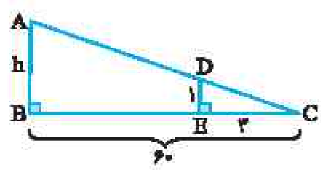
$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}\Rightarrow\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{۳x+۱}{۶}\Rightarrow ۶x+۶=۳x^{۲}+۷x+۲$$

$$۳x^{۲}+x-۴=۰\Rightarrow(۳x+۴)(x-۱)=۰\Rightarrow x=۱$$



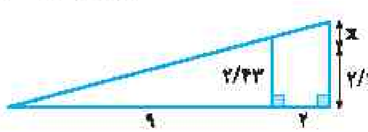
۵۵ شکل مسئله را به طور ساده‌تر رسم و رأس‌های آن را نام‌گذاری می‌کنیم تا بتوانیم از قضیهٔ تالس یا تعمیم آن استفاده کنیم. در شکل زیر، بنابر فرض مسئله DE=۱m ، CE=۳m و BC=۶۰m . پس کافی است از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CAB استفاده کنیم.

$$DE||AB\Rightarrow\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{CB}\Rightarrow\frac{۱}{h}=\frac{۳}{۶۰}\Rightarrow h=۲۰m$$



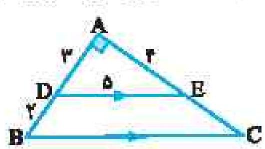
۵۶ این مسئله همان تمرین والیبالیست از کتاب درسی است (تمرین ۸ صفحهٔ ۳۷). با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{۹}{۱۱}=\frac{۲/۴۳}{x+۲/۱}\Rightarrow\frac{۱}{۱۱}=\frac{۰/۲۷}{x+۲/۱}\Rightarrow x+۲/۱=۲/۹۷\Rightarrow x=۰/۸۷$$



۵۷ الف) با توجه به قضیهٔ فیثاغورس DE=۵ . پس طبق تعمیم قضیهٔ تالس،

$$DE||BC\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۵}{BC}\Rightarrow BC=\frac{۲۵}{۳}$$

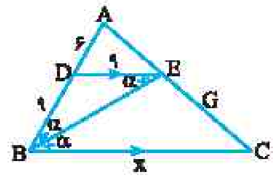


ب) شاید تصور کنید که فرض مسئله کم است. در جواب باید بگوییم که به فرض نیمساز بودن BE توجهی نکرده‌اید. کلید حل آنجاست. کافی است از قضیهٔ خطوط موازی و مورب استفاده کنید. توجه کنید که

DE||BC و BE مورب $\Rightarrow D\hat{E}B=E\hat{B}C=\alpha$

بنابراین $D\hat{E}B=D\hat{B}E=\alpha$ و در نتیجه مثلث DBE متساوی‌الساقین است. پس $DB=DE=۹$. اکنون با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس معلوم می‌شود که

$$DE||BC\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۶}{۱۵}=\frac{۹}{x}\Rightarrow x=\frac{۴۵}{۲}=۲۲/۵$$

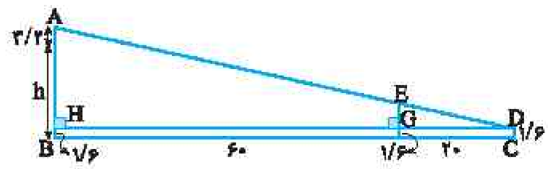


۵۸ این سؤال را با هر یک از سه روشی که در مسئلهٔ ۱۸ درس‌نامه ارائه شد، می‌توان پاسخ داد. ما در اینجا از روش سوم استفاده می‌کنیم. از نقطهٔ D بر پاره‌خط AB عمودی رسم می‌کنیم. اکنون کافی است از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث DAH استفاده کنیم:

$$EG||AH\Rightarrow\frac{DG}{DH}=\frac{EG}{AH}\Rightarrow\frac{۲۰}{۸۰}=\frac{۴/۴}{AH}\Rightarrow AH=۱۷/۶$$

پس $AB=AH+BH=۱۷/۶+۱/۶=۱۹/۲$ ، در نتیجه

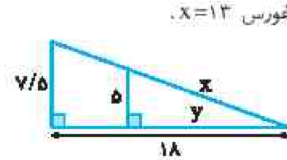
$$۳/۲+h=۱۹/۲\Rightarrow h=۱۶$$



۵۹ بنابر تعمیم قضیهٔ تالس،

$$\frac{۵}{۷/۵}=\frac{y}{۱۸}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{y}{۱۸}\Rightarrow y=۱۲$$

پس طبق قضیهٔ فیثاغورس $x=۱۳$.



۶۰ در ابتدا با دو بار استفاده از عکس قضیهٔ تالس در مثلث ABC ثابت می‌کنیم $DE||BC$ و $FG||BC$. توجه کنید که

$$\frac{AD}{DB}=\frac{۱}{۲}=\frac{AE}{EC}\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}}DE||BC$$

$$\frac{AF}{FB}=۲=\frac{AG}{GC}\xrightarrow{\text{عکس قضیهٔ تالس}}FG||BC$$

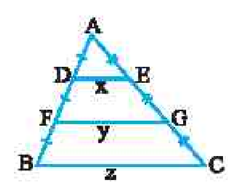
اکنون از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC نتیجه می‌شود

$$DE||BC\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{z}\Rightarrow x=\frac{z}{۳}$$

$$FG||BC\Rightarrow\frac{AF}{AB}=\frac{FG}{BC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{y}{z}\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}z$$

در نتیجه

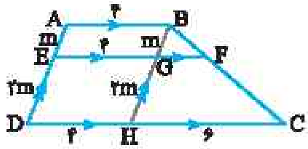
$$x+y=\frac{z}{۳}+\frac{۲z}{۳}=z$$



۶۱ همان‌طور که در مسئلهٔ ۱۸ درس‌نامه دیدید، سه روش برای حل این مسئله ارائه شد. با هر کدام از آن‌ها می‌توان به این مسئله پاسخ داد. ما در اینجا از روش سوم استفاده می‌کنیم. ابتدا اطلاعات مسئله را به شکل منتقل می‌کنیم. سپس از نقطهٔ B خطی موازی AD رسم می‌کنیم و دوباره اطلاعات جدید را به شکل منتقل می‌کنیم. بنابر تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BHC.

$$GF||HC\Rightarrow\frac{GF}{HC}=\frac{BG}{BH}\Rightarrow\frac{GF}{۶}=\frac{m}{۳m}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow GF=۲$$

$$EF=GF+EG=۶$$

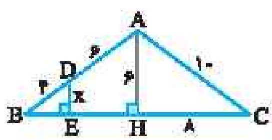


۶۲ توجه کنید که مثلث ABC متساوی‌الساقین است. $(AB=AC=۱۰)$ کافی است ارتفاع وارد بر قاعدهٔ این مثلث متساوی‌الساقین را رسم کنیم. در این صورت

$$BH=HC=۸\Rightarrow AH^{۲}=AC^{۲}-HC^{۲}=۱۰^{۲}-۸^{۲}=۳۶\Rightarrow AH=۶$$

اکنون از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث BAH استفاده می‌کنیم:

$$DE||AH\Rightarrow\frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AH}\Rightarrow\frac{۴}{۱۰}=\frac{x}{۶}\Rightarrow x=\frac{۲۴}{۱۰}=۲/۴$$

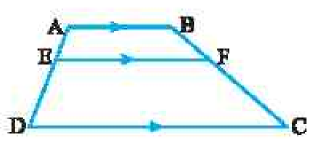


۶۳ موارد (الف) و (ب) درست‌اند. موارد (پ) و (ت) نادرست‌اند. ابتدا ثابت می‌کنیم مورد (الف) درست است. طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$. با ترکیب صورت در مخرج این تناسب به‌دست می‌آید

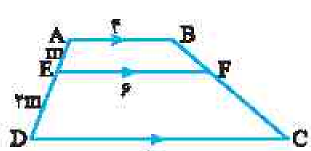
$$\frac{AE}{AE+ED}=\frac{BF}{BF+FC}\Rightarrow\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}$$

برای مورد (ب) کافی است از ترکیب مخرج در صورت تناسب $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$ استفاده شود:

$$\frac{AE+ED}{ED}=\frac{BF+FC}{FC}\Rightarrow\frac{AD}{ED}=\frac{BC}{FC}\xrightarrow{\text{معکوس}}\frac{DE}{DA}=\frac{CF}{CB}$$



برای رد کردن دو مورد (پ) و (ت) از تمرین ۶۱ استفاده می‌کنیم که مثال نقضی برای این دو است. در شکل زیر $\frac{EF}{DC}=\frac{۶}{۱۰}$ و $\frac{AB}{DC}=\frac{۴}{۱۰}$ ، ولی $\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC}=\frac{۱}{۳}$.

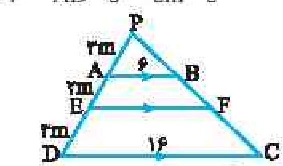


روش اول: دو ساق را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند. اکنون می‌خواهیم PA را برحسب m حساب کنیم. از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم:

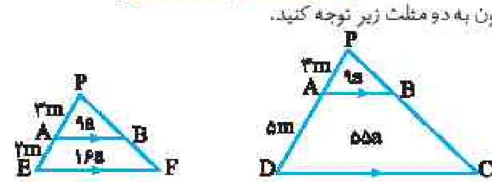
$$\triangle PDC: AB || DC \Rightarrow \frac{PA}{PD}=\frac{AB}{DC}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

با تفضیل صورت در مخرج این تناسب داریم

$$\frac{PA}{PD-PA}=\frac{3}{8-3} \Rightarrow \frac{PA}{AD}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{PA}{5m}=\frac{3}{5} \Rightarrow PA=3m$$



اکنون به دو مثلث زیر توجه کنید.



$$\triangle PAB \sim \triangle PEF \Rightarrow \frac{S_{PAB}}{S_{PEF}}=(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$$

$$S_{PAB}=9a,\quad S_{PEF}=25a$$

$$\triangle PAB \sim \triangle PDC \Rightarrow \frac{S_{PAB}}{S_{PDC}}=(\frac{3}{8})^2=\frac{9}{64} \Rightarrow \frac{9a}{S_{PDC}}=\frac{9}{64}$$

$$S_{PDC}=64a$$

بنابراین

$$S_{ABFE}=S_{PEF}-S_{PAB}=25a-9a=16a$$

$$S_{ABCD}=S_{PDC}-S_{PAB}=64a-9a=55a$$

$$S_{EFCD}=S_{ABCD}-S_{ABFE}=55a-16a=39a$$

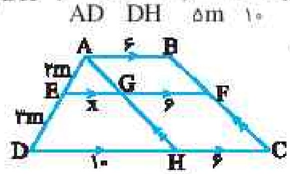
در نتیجه

$$\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}}=\frac{16a}{39a}=\frac{16}{39}$$

روش دوم: آیا می‌توانید طول پاره‌خط EF را محاسبه کنید؟ برای این منظور از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا EF را در نقطهٔ G و CD را در نقطهٔ H قطع کند. از تعمیم قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم:

$$\triangle ADH: EG || DH \Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{EG}{DH} \Rightarrow \frac{2m}{5m}=\frac{x}{10} \Rightarrow x=4$$

بنابراین $EF=10$.



اکنون از A بر قاعده عمود رسم می‌کنیم. توجه کنید که

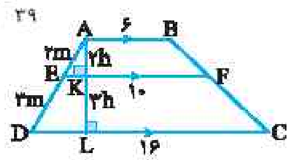
$$\triangle ADL: EK || DL \Rightarrow \frac{AE}{ED}=\frac{AK}{KL} \Rightarrow \frac{AK}{KL}=\frac{2}{3}$$

با انتخاب پارامتر h می‌توان نوشت $AK=2h$ و $KL=3h$. می‌دانیم مساحت ذوزنقه برابر با نصف مجموع اندازه‌های دو قاعده در طول ارتفاع است، پس

$$S_{ABFE}=\frac{6+10}{2}\times 2h=16h,\quad S_{EFCD}=\frac{10+16}{2}\times 3h=39h$$

بنابراین

$$\frac{S_{ABFE}}{S_{EFCD}}=\frac{16h}{39h}=\frac{16}{39}$$



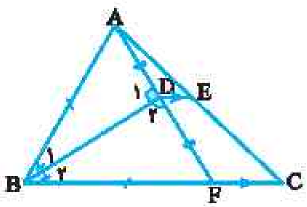
پاسخ مسائل تکمیلی

۱ حل را نخوانید و سعی کنید خودتان به‌آن پاسخ دهید. کافی است AD را امتداد دهیم تا BC را در نقطهٔ F قطع کند. به شکل توجه کنید. در آن چه چیزی مشاهده می‌کنید؟ آیا یک هم‌نهشتی و یک قضیهٔ تالس می‌بینید؟ دو مثلث ABD و FBD به حالت (زض‌ز) هم‌نهشت‌اند. زیرا $\hat{D}_1=\hat{D}_2=90^\circ$، $BD=BD$ و $\hat{B}_1=\hat{B}_2$.

در نتیجه $BF=BA=96cm \Rightarrow FC=BC-BF=156-96=60cm$

همچنین $AD=DF$، پس طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث AFC.

$$DE || FC \Rightarrow \frac{AD}{AF}=\frac{DE}{FC} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{DE}{2} \Rightarrow DE=30\ cm$$



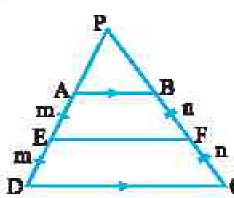
۲ حتماً به این نتیجه رسیده‌اید که اگر (الف) اثبات شود، قسمت (ب) ساده است. با سه روش قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم.

روش اول: دو ساق را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند. توجه کنید که در مثلث PDC.

$$AB || DC \Rightarrow \frac{PA}{AD}=\frac{PB}{BC} \Rightarrow \frac{PA}{2m}=\frac{PB}{2n} \Rightarrow \frac{PA}{m}=\frac{PB}{n} \Rightarrow \frac{PA}{AE}=\frac{PB}{BF}$$

تناسب آخر را در شکل بررسی کنید. از چه چیزی باید استفاده کنیم؟ از عکس قضیهٔ تالس در مثلث PEF به‌دست می‌آید

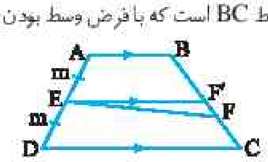
$$\frac{PA}{AE}=\frac{PB}{BF} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{عکس قضیهٔ}} AB || EF$$



روش دوم: با استفاده از برهان خلف؛ فرض می‌کنیم EF موازی AB نیست، پس از نقطهٔ E خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا BC را در نقطهٔ F' قطع کند. حال طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه،

$$\frac{AE}{ED}=\frac{BF'}{F'C} \Rightarrow \frac{m}{m}=\frac{BF'}{F'C} \Rightarrow BF'=F'C$$

بنابراین نقطهٔ F' وسط BC است که با فرض وسط بودن F تناقض دارد.

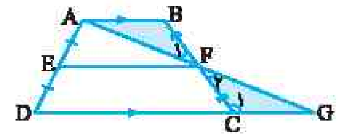


روش سوم: این روش، روش معروفی است. محل برخورد امتدادهای AF و DC را نقطهٔ G می‌نامیم. دو مثلث ABF و GCF هم‌نهشت‌اند، زیرا

$$\left\{\begin{array}{l} AB || CG,\ BC\ \text{مورب} \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}_1 \\ BF=FC \\ \hat{F}_1=\hat{F}_2\ \text{متقابل به رأس} \end{array}\right. \xrightarrow{(\text{زض‌ز})} \triangle ABF \cong \triangle GCF$$

پس طبق اجـزای متناظر $AF=GF$. اکنون در مثلث ADG از عکس قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AE}{ED}=۱=\frac{AF}{FG}\Rightarrow EF||DG$$



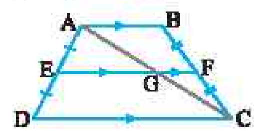
حالا اثبات قسمت (ب) ساده است. می‌توانیم روش سوم در بالا را ادامه دهیم و به اثبات قسمت (ب) برسیم. اما ما در اینجا روش دیگری ارائه می‌کنیم. با رسم قطر AC دو تا تعمیم قضیهٔ تالس در شکل به‌وجود می‌آید. توجه کنید که

$$\triangle ADC: EG||DC\Rightarrow\frac{AE}{AD}=\frac{EG}{DC}\Rightarrow\frac{EG}{DC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow EG=\frac{DC}{۲}$$

$$\triangle CAB: GF||AB\Rightarrow\frac{CF}{CB}=\frac{GF}{AB}\Rightarrow\frac{GF}{AB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow GF=\frac{AB}{۲}$$

در نتیجه

$$EF=EG+GF=\frac{DC}{۲}+\frac{AB}{۲}=\frac{AB+CD}{۲}$$



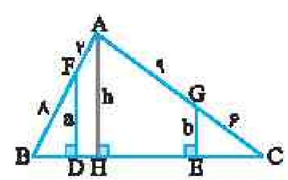
۳ در شکل هیچ قضیهٔ تالسی مشاهده نمی‌شود. اما با رسم یک پاره‌خط (در شـکل، ارتفاع AH)مسئله واضح می‌شود. اکنون مطابق شکل دو تا قضیهٔ تالس در شکل مشاهده می‌شود.

$$\triangle BAH: FD||AH\Rightarrow\frac{BF}{BA}=\frac{FD}{AH}\Rightarrow\frac{۸}{۱۰}=\frac{a}{h}$$

$$\triangle CAH: GE||AH\Rightarrow\frac{CG}{CA}=\frac{GE}{AH}\Rightarrow\frac{۶}{۱۵}=\frac{b}{h}$$

با اسـتفاده از دو تناسب بالا به جواب مسـئله می‌رسیم. کافی است این دو را بر هم تقسیم کنیم یا به صورت زیر عمل کنیم:

$$\begin{cases}\frac{a}{h}=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow a=\frac{۴h}{۵}\\ \frac{b}{h}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow b=\frac{۲h}{۵}\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\frac{۴h}{۵}}{\frac{۲h}{۵}}=۲$$

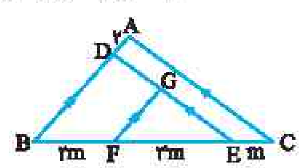


۴ گام اول انتقال اطلاعات به شـکل اسـت. آیا دو تا قضیهٔ تالس در شکل مشاهده می‌کنید؟

$$\triangle BAC: DE||AC\Rightarrow\frac{BD}{DA}=\frac{BE}{EC}\Rightarrow\frac{BD}{۲}=\frac{۵m}{m}\Rightarrow BD=۱۰$$

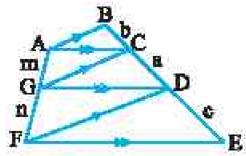
همچنین از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث EBD نتیجه می‌شود

$$GF||DB\Rightarrow\frac{EF}{EB}=\frac{GF}{DB}\Rightarrow\frac{۳m}{۵m}=\frac{GF}{۱۰}\Rightarrow GF=۶$$



۵ ظاهر مسـئله ترسناک اسـت اما اثبات آن ساده است. پس قبل از اینکه اثبـات را بخوانیـد خوب به آن فکر کنیـد. اگر بخواهیم شـما را راهنمایی کنیم، می‌گوییـم دو بار از قضیهٔ تالس در ذوزنقه اسـتفاده کنیـد. در ذوزنقهٔ $ABDF$ داریم $\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$. همچنین در ذوزنقهٔ $ACEF$ داریم $\frac{m}{n}=\frac{a}{c}$. در نتیجه

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{c}\Rightarrow a^۲=bc$$



۶ در شکل فقط یک تالس مشاهده می‌شود اما با کمی تغییر در آن می‌توان به نتایج بهتری رسـید. کافی اسـت FE و AD را امتداد دهیم تا یکدیگر را در نقطـهٔ Gقطـع کنند. اکنون در شـکل یک مثلث متساوی‌السـاقین و یک تالس پروانه‌ای هم مشاهده می‌شود. $AB||FG$ ، AG مورب $\Rightarrow\hat{A}_۱=\hat{G}$

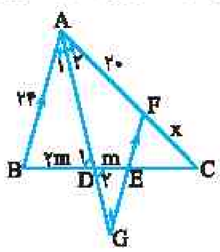
پـس $\hat{A}_۲=\hat{G}$ و در نتیجـه مثلـث FAG متساوی‌السـاقین اسـت. بنابرایـن $FG=FA=۲۰$. اکنون از تالس پروانه‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{G}\\ \hat{D}_۱=\hat{D}_۲\end{cases}\xrightarrow{(ز\,ز)}\triangle ABD\sim\triangle GED$$

$$\boxed{\frac{AB}{GE}=\frac{BD}{ED}}=\frac{AD}{GD}\Rightarrow\frac{۲۴}{GE}=\frac{۲m}{m}\Rightarrow GE=۱۲$$

پس $FE=FG-GE=۲۰-۱۲=۸$. اکنون با اسـتفاده از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث CAB نتیجه می‌شود

$$FE||AB\Rightarrow\frac{FE}{AB}=\frac{CF}{CA}\Rightarrow\frac{۸}{۲۴}=\frac{x}{x+۲۰}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{x+۲۰}\Rightarrow x=۱۰$$



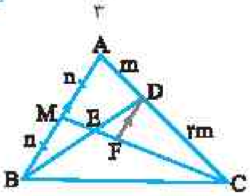
۷ ابتدا اطلاعات را به شـکل انتقال می‌دهیم. مانند مسئلهٔ ۳۰ درس‌نامه، برای حل این سـؤال روش‌های زیادی وجود دارد. ما در اینجا به یک روش اکتفا می‌کنیم. اما شما سعی کنید روش‌های دیگری هم پیدا کنید. این موضوع باعث افزایش تسلط و توانایی شما در قضیهٔ تالس و تشابه می‌شود.

از D خطی موازی AB رسـم می‌کنیم تا EC را در نقطهٔ F قطع کند. اکنون در شکل یک تالس و یک تالس پروانه‌ای مشاهده می‌شود. توجه کنید که

$$\triangle CAM: DF||AM\Rightarrow\frac{CD}{CA}=\frac{DF}{AM}\Rightarrow\frac{۲m}{۳m}=\frac{DF}{n}\Rightarrow DF=\frac{۲n}{۳}$$

اکنون با استفاده از تالس پروانه‌ای معلوم می‌شود که $\triangle BEM\sim\triangle DEF$ ، پس

$$\boxed{\frac{BE}{DE}}=\frac{EM}{EF}=\boxed{\frac{BM}{DF}}\Rightarrow\frac{BE}{DE}=\frac{n}{\frac{۲n}{۳}}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$



پاسخنامهٔ سؤالات امتحانی بارم‌بندی شده

۱ الف) نادرست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵)

پ) نادرست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)

ث) a) نادرست (۰/۲۵) b) درست (۰/۲۵)

c) نادرست (۰/۲۵) d) درست (۰/۲۵)

ج) درست (۰/۲۵)

چ) a) نادرست (۰/۲۵) b) نادرست (۰/۲۵)

c) درست (۰/۲۵) d) درست (۰/۲۵)

e) درست (۰/۲۵)

ح) نادرست (۰/۲۵) خ) درست (۰/۲۵)

۲ الف) $S_{ABC}=\frac{1}{2}BD\times AC$ (۰/۲۵) $=\frac{1}{2}CE\times AB$ (۰/۲۵)

ب) اندازه‌های ارتفاع‌های (۰/۲۵) پ) اندازهٔ قاعده‌هایی (۰/۲۵)

ت) اندازهٔ قاعده‌های (۰/۲۵) ث) هم‌مساحت (۰/۲۵)

ج) واسطهٔ (میانگین) هندسی (۰/۲۵)

چ) $\frac{DE}{BC}$ (۰/۲۵)

ح) a) $\frac{AE}{EC}$ (۰/۲۵) b) $\frac{CE}{CA}$ (۰/۲۵)

c) $\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ (۰/۲۵) d) $\frac{BD}{DA}$ (۰/۲۵)

خ) a) $\frac{BN}{NC}$ (۰/۲۵) b) $\frac{CN}{CB}$ (۰/۲۵)

د) متشابه (۰/۲۵) ذ) زاویهٔ بین آن‌ها هم‌اندازه (۰/۲۵)

ر) a) $BH\times BC$ (۰/۵) b) $BH\times HC$ (۰/۵)

c) $CH\times CB$ (۰/۵) d) $AB\times AC$ (۰/۵)

ز) k (۰/۲۵) ژ) k (۰/۲۵) / k^2 (۰/۲۵)

س) متشابه (۰/۲۵)

۳ الف) ۶ (۰/۲۵) ب) ۳ (۰/۲۵)

پ) $\frac{۳}{۲}$ (۰/۲۵) ت) ۳ یا $\frac{۱}{۳}$ (۰/۲۵)

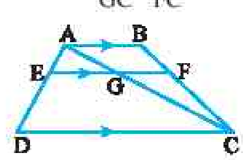
ث) ۱۶ یا $\frac{۱}{۱۶}$ (۰/۲۵) ج) ۲۰ (۰/۲۵)

چ) ۹ (۰/۲۵) / ۱۶ (۰/۲۵) ح) ۱۶ (۰/۲۵)

۴ قضیهٔ تالس در ذوزنقه: $AB||EF||DC\Rightarrow\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$ (۰/۲۵)

اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم و از قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\triangle ADC: EG||DC \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \frac{AE}{ED}=\frac{AG}{GC} \text{ (۰/۲۵)}\\ \triangle CAB: GF||AB \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \frac{AG}{GC}=\frac{BF}{FC} \text{ (۰/۲۵)}\end{cases} \Rightarrow \frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC} \text{ (۰/۲۵)}$$



۵ الف) بنابر قضیهٔ تالس داریم

$$DE||BC \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \text{ (۰/۲۵)}$$

بنابراین

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب صورت}} \frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \text{ (۰/۲۵)}$$

ب)

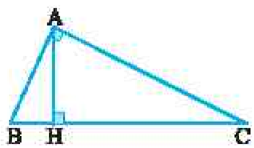
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \xrightarrow[\text{در صورت}]{\text{تفضیل مخرج}} \frac{AB-AD}{AB}=\frac{AC-AE}{AC} \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\frac{BD}{BA}=\frac{CE}{CA} \text{ (۰/۲۵)}$$

۶ الف)

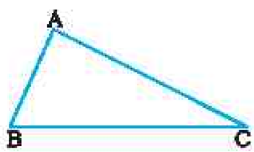
$$\begin{cases}AB^2=BH.BC \text{ (۰/۲۵)}\\ AC^2=CH.BC \text{ (۰/۲۵)}\end{cases} \xrightarrow{+}$$

$$AB^2+AC^2=(\underbrace{BH+CH}_{BC}).BC \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2 \text{ (۰/۲۵)}$$



ب)

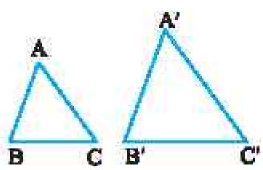
$$\hat{A}=90^\circ \Leftrightarrow BC^2=AB^2+AC^2 \text{ (۰/۵)}$$



۷ الف)

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=k \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \frac{P}{P'}=k \text{ (۰/۲۵)}$$



ب)

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AH}{A'H'}=k \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}AH.BC}{\frac{1}{2}A'H'.B'C'}=(\frac{AH}{A'H'})(\frac{BC}{B'C'})=k^2 \text{ (۰/۵)}$$